برای رادیوی شناختگر Spectrum Sensing

علی فاضلی ، سید کاظم هاشمی زاده

دانشگاه صنعتی اصفهان

E-mail: a.fazeli@ec.iut.ac.ir , sk.hashemizadeh@ec.iut.ac.ir

چکیده

Spectrum sensing برای رادیوی شاختگر وظیفه ای است که کل عملکرد رادیوی شناختگر بر آن تکیه دارد . از این رو لازم است این وظیفه توسط رادیوی شناختگر به گونه ای قابل اعتماد و با کارایی محاسباتی قابل قبول انجام شود . یک حسگر طیف می بایست باندهای فرکانسی که تحت استفاده نیستند را به درستی آشکار سازد و تخمین صحیحی از توان متوسط در هر یک از زیر باند ها داشته باشد . همچنین می بایست جهت سیگنال های تداخل را به درستی تشخیص دهد . cyclostationarity دیگر ویژگی مهمی است که یک حسگر طیف می بایست تعیین نماید . روش multitaper(MTM) برای تخمین غیر پارامتریک طیف ، این وظایف را بصورت دقیق ، موثر، مقاوم و با کارایی محاسباتی خوب انجام میدهد .در این مقاله ابتدا به بررسی کلی این روش پرداخته میشود و تعمیم هایی از آن آورده میشود . سپس تئوری ریاضی آن با جزئیات دقیق تری مورد برررسی قرار می گیرد .

کلمات کلیدی : رادیوی شناختگر، spectrum sensing ، روش multitaper(MTM) ، پردازش space – time .

۱- مقدمه

آشکارسازی چاله های طیف فرکانسی در همسایگی جغرافیایی رادیوی شناختگر spectrum sensing نامیده می شود . برای اینکه تعریف دقیق تری از این وظیفه ارائه شود آنرا به چهار زیروظیفه تقسیم بندی می کنند :

- آشکاسازی چاله های طیف فرکانسی .
- رزولوشن طیفی در هر یک از چاله های فرکانسی .
- تخمین جهت فضایی سیگنالهای تداخلی ورودی .
- طبقه بندی سیگنالها .

آشکار سازی چاله های طیف فرکانسی در ساده ترین فرم خود ، هنگامی که یک فضای سفید مطرح باشد (منظور از فضای سفید اینست که در عدم حضور سیگنال تنها نویز در زیر باند مورد نظر وجود دارد .) به یک مسئله آزمون فرضیه باینری تبدیل می شود که آنرا میتوان با یک آشکارساز انرژی یا روشهای ساده دیگر حل نمود .

اما مسئله همواره به این سادگی نیست . در اغلب موارد ما با فضاهای خاکستری مواجه هستیم . (منظور از فضای خاکستری اینست که در عدم حضور سیگنال ، علاوه بر نویز سیگنالهای تداخلی هم در زیر باند مورد نظر وجود دارند .) در اینگونه موارد نیاز است طیف فرکانسی تخین زده شود . تخمین طیف به دو شکل کلی صورت میگیرد . روش های پارامتریک که در آن فرآیند مورد نظر بر اساس یک مدل معین تخمین زده می شود . روش های غیر پارامتریک که نیازی به مدل سازی فرآیند ندارد . از آنجا که یک رادیوی شناختگر با سیگنالهای مختلف سروکار دارد روش های غیر پارامتریک ارجحیت دارند . رادیوی شناختگر نیازمند اینست که روش غیر پارامتریک تخمین طیف رزولوشن طیفی بالایی هم از نظر توان متوسط و هم به لحاظ فرکانسی داشته باشد و این تخمین با قابلیت اعتماد بالا و کارایی محاسباتی

قابل قبول و بصورت real time انجام گیرد . تخمینگر طیفی که این ویژگی ها را برآورده می سازد تخمینگر طیف multitaper است [1] .

۲- روش multitaper(MTM) برای تخمین طیف

در مقالات قبل تر روی روش های غیر پارامتریک تخمین طیف ، مشکل بودن تخمین طیف به دلیل مسئله بایاس- واریانس تائید شده است .

- بایاس تخمین طیف توان برای یک دنباله زمانی به خاطر پدیده نشت لوبهای جانبی است که اثر آنرا با tapering (windowing) دنباله زمانی می توان کاهش داد .
- هزینه ای که در ازای این بهبود پرداخت می شود افزایش واریانس تخمین است که به خاطر از دست رفتن اطلاعات در اثر کاهش اندازه موثر نمونه ها، اتفاق می افتد .

چگونه می توان این مسئله را با کاهش اطلاعات از دست رفته ناشی از tapering حل نمود ؟ پاسخ به این سوال اساسی در واقع در استفاده از taper های (پنجره های) چندگانه متعامد نهفته است . ایده ای که در [1] مطرح شده است . به خصوص فر آیندی که طی آن قسمت هایی از دنباله زمانی که در پهنای باند f-w تا f+w قرار دارند بصورت خطی به خانواده ای از دنباله ها به نام دنباله های slepian بسط داده می شود . این دنباله ها در مقالات با عنوان discrete prolate spheroidal wave نیز شناخته می شوند . ویژگی اصلی دنباله های slepian این است که تحت شرط ثابت بودن اندازه دنباله ، بیشترین تمرکز انرژی را در پهنای باند مورد نظر (2w حول f) دارند . این ویژگی واریانس را در ازای رزولوشن طیف بهبود می بخشد . به عبارت دیگر مسئله بایاس –واریانس با مسئله بایاس – رزولوشن جایگزین می شود که اگر یکی به درستی در نظر گرفته شود مشکل واریانس هم حل می شود .

۲.۱- ویژگی های تخمین طیف MTM

۱) در تخمین طیف multitaper بایاس به دو قسمت کمی تقسیم می شود :

- بایاس local ناشی از مولفه های فرکانسی درون باند از f-w تا f+w .
- بایاس broadband ناشی از مولفه های فرکانسی خارج از باند فوق .

۲) رزولوشن تخمینگرهای طیف multitaper بطو طبیعی توسط پهنای باند عبور یعنی 2w تعیین می شود .

۳) این تخمینگر ها یک تبادل بین بایاس و واریانس ارائه می کنند که به آسانی از نظر کمی قابل بیان است .تخمین مستقیم طیف توسط این تخمینگرها فقط با درجه آزادی بیش از دو قابل انجام است . نوعا درجه آزادی بسته به حاصلضرب زمان- پهنای باند از ۶ تا ۱۰ تغییر میکند .

۴) تخمینگر طیف multitaper را می توان برای تفکیک مولفه های خطی در باند [f-w ,f+w] با وارد کردن آزمون harmonic F-test بکار برد .

۲.۲- تئوری تخمینگر طیف multitaper

فرض کنید t زمان گسسته را نشان دهد و دنباله زمانی {x(t)} برای t=0 تا t=N-1 نماینده سیگنال باند پایه متناظر با سیگنال RF دریافتی با شد .با این دنباله زمانی داده شده تخمینگر MTM پارامترهای زیر را تعیین می کند [1] :

- یک دنباله اورتونرمال از taper های slepian که با $\left\{v_t^{(k)}\right\}_{t=0}^{N-1}$ نموده می شود .
- مجموعه تبدیلات فوریه متناظر :

$$X_k(f) = \sum_{t=0}^{N-1} x(t) v_t^{(k)} exp\,(-j2\pi ft) \quad (۱)$$

که k=0,1,2 ,...,K-1 .توزیع انرژی مولفه های eigenspectra که به صورت $|X_k(f)|^2$ تعریف می شوند درون پهنای باند رزولوشن 2W متمرکز شده است .حاصلضرب پهنای بان در زمان باندی روی تعداد taper ها تعیین میکند .

$$C_0 = NW \;, \quad K \le \lfloor 2NW \rfloor \quad (۲)$$

تعداد taper ها نیز درجه آزادی موجود برای کنترل واریانس تخمینگر طیف توان را مشخص می کند . انتخاب پارامترهای C_0 و K یک تبادل بین بایاس واریانس و رزولوشن ایجاد می کند . بایاس این تخمینگرها عمدتا توسط بزرگترین مقدار ویژه که با $\lambda_0(N,W)$ نموده میشود کنترل می شود که بصورت مجانبی از رابطه زیر بدست می آید .

$$1 - \lambda_0 = 4\pi\sqrt{C_0}\exp\,(-2\pi C_0) \quad (۳)$$

این رابطه کسری از کل انرژی لوبهای جانبی را بدست می دهد که برابر مجموع نشت به فرکانس های خارج از باند (-W,W) می باشد .کل انرژی لوبهای جانبی با C_0 سریعا کاهش می یابد . یک تخمین طیف طبیعی بر اساس چند eigenspectra اول که کمترین نشت لوبهای جانبی را دارد عبارتست از [1] :

$$\hat{S}(f) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} \lambda_k |X_k(f)|^2}{\sum_{k=0}^{K-1} \lambda_k} \quad (۴)$$

که λ_k ها مقدار ویژه متناظر با k امین eigenspectrum می باشند . مخرج کسر در رابطه فوق تخمین را بدون بایاس می کند.

۲.۳- تغییر تخمینگر طیف multitaper بصورت وفقی

در حالی که eigenspectra های مرتبه پایین ویژگیهای بایاس عالی دارند اما این ویژگی وقتی تعداد taper ها یعنی K به مقدار باند بالایی خود نزدیک می شود خراب می شود . در [1] مجموعه ای از وزنهای وفقی که با $\{d_k(f)\}$ نموده میشود برای کاهش وزن eigenspectra های مرتبه بالتر وارد شده است . با استفاده از روال بهینه سازی مجموع مربعات خطا فرمول زیر برای این وزنها استخراج می شود :

$$d_k(f) = \frac{\sqrt{\lambda_k} S(f)}{\lambda_k S(f) + E[B_k(f)]} \;, k = 0,1,2,\ldots,K-1 \quad (۵)$$

که در رابطه فوق S(f) طیف توان اصلی و $B_k(f)$ بایاس broadband برای k امین eigenspectrum می باشد .بعلاوه

$$E[B_k(f)] \le (1-\lambda_k)\sigma^2, k = 0,1,2,\ldots,K-1 \quad (۶)$$

که σ^2 واریانس فرایند را نشان می دهد و به عنوان تابعی از سری زمانی از رابطه زیر بدست می آید :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} |x(t)|^2$$

برای محاسبه وزنهای وفقی از رابطه فوق ما نیاز به داشتن S(f) داریم از این رو نمی توانیم از این رابطه مستقیما استفاده کنیم ولی می توانیم از ان برای بدست آوردن وزنها بصورت بازگشتی استفاده نمائیم . تخمینگر وفقی طیف عبارتست از :

$$\hat{S}(f) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} |d_k(f)|^2 \hat{S}_k(f)}{\sum_{k=0}^{K-1} |d_k(f)|^2} \quad (۷)$$

که

$$\hat{S}_k(f) = |X_k(f)|^2 \,, k = 0,1,2,\ldots,K-1$$

با قرار دادن $\hat{S}(f)$ به جای $S(f)$ در رابطه وزنها و جایگزینی حاصل در رابطه فوق به رابطه زیر می رسیم :

$$\sum_{k=0}^{K-1} \frac{\lambda_k\left(\hat{S}(f) - \hat{S}_k(f)\right)}{\left(\lambda_k \hat{S}(f) + \hat{B}_k(f)\right)^2} = 0 \quad (۸)$$

که در این رابطه $\hat{B}_k(f)$ تخمینی از $E[B_k(f)]$ می باشد . با استفاده از باند بالایی برای $E[B_k(f)]$ که در بالا آمده می توانیم قرار دهیم :

$$\hat{B}_k(f) = (1-\lambda_k)\sigma^2, k = 0,1,2,\ldots,K-1$$

حالا ما تمام آنچه برای حل معادله فوق لازم است را داریم و به رابطه بازگشتی زیر می رسیم :

$$\hat{S}^{(j+1)}(f) = \left[\sum_{k=0}^{K-1} \frac{\lambda_k \hat{S}_k^{(j)}(f)}{\left(\lambda_k \hat{S}^{(j)}(f)+\hat{B}_k(f)\right)^2}\right] \times \left[\sum_{k=0}^{K-1} \frac{\lambda_k}{\left(\lambda_k \hat{S}^{(j)}(f)+\hat{B}_k(f)\right)^2}\right]^{-1} \quad (٩)$$

که j نشان دهنده شماره گام iteration است . همگرایی رابطه بازگشتی فوق معمولا سریع است و با پنج تا بیست گام به تخمینی از طیف میرسد که دارای اختلاف ۵٪ میباشد . با استفاده از نتیجه بدست آمده از رابطه بازگشتی فوق می توانیم وزنهای مطلوب را بدست آوریم .

۲.۴- خلاصه نکات روش MTM

- تخمین طیف به روش MTM را به دلیل اینکه eigenspectrum ، k ام یعنی $|X_k(f)|^2$ از اطلاعات فاز به ازای تمام k ها چشم پوشی می کند را incoherent می گویند .
- پارامترهای پیشنهادی مورد نیاز برای تخمینگر طیف MTM عبارتند از :
  - پارامتر $C_0=4$ ، قابل افزایش تا ۱۰ .
  - تعداد taper های slepian K=10 ، قابل افزایش تا ۱۶.

این مقادیر به ویژه زمانی که رنج دینامیک سیگنال RF بزرگ باشد مورد نیاز هستند .

- هنگامی که تعداد پنجره ها افزایش می یابد و به مقدار حدی 2NW می رسد باید از تخمینگر طیف multitaper وقتی استفاده شود .

۳- پردازش Space – Time

در آنالیز محیط رادیویی در همسایگی جغرافیایی یک گیرنده رادیو شناختگر ، ما علاوه بر آشکار سازی چاله های فرکانسی نیاز به حس جهت نیز داریم تا رادیویی شناختگر بتواند جهت سیگنالهای تداخلی که از راستاهای نا شناخته ای می ایند تشخیص دهد . برای این منظور ما نیازمند آرایه ای از حسگرها (آنتن ها) هستیم تا بتوانیم محیط رادیویی را در جهات مختلف حس کنیم .

یک آرایه M تایی از آنتن های حسگر محیط در نظر بگیرید . تبدیل فوریه متناظر با دنباله زمانی گرفته شده از m امین حسگر که با k امین دنباله slepian ، taper شده است را با $X_k^{(m)}(f)$ نشان می دهیم که m= 0,1,2,…,M-1 و k=0,1,…,K-1 . بنابراین میتوانیم یک ماتریس M×K از این تبدیلات با مقادیر مختلط داشته باشیم و آنرا ماتریس spatiotemporal گویند :

$$A(f) = \begin{bmatrix} a_0^{(0)}X_0^{(0)} & a_1^{(0)}X_1^{(0)} & \cdots & a_{K-1}^{(0)}X_{K-1}^{(0)} \\ a_0^{(1)}X_0^{(1)} & a_1^{(1)}X_1^{(1)} & & a_{K-1}^{(1)}X_{K-1}^{(1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_0^{(M-1)}X_0^{(M-1)} & a_1^{(M-1)}X_1^{(M-1)} & \cdots & a_{K-1}^{(M-1)}X_{K-1}^{(M-1)} \end{bmatrix} \quad (١٠)$$

هر سطر این ماتریس مربوط به یکی از حسگر هاست و هر ستون مربوط به یکی از taper هاست . $a_k^{(m)}$ ها هم ضرایب متناظر با هر یک از درایه ها می باشد . در اینجا لازم است دو شرط ضروری در نظر گرفته شود :

- تعداد پنجره های slepian یعنی K بزرگتر از تعداد حسگرهاست . این شرط برای جلوگیری از "spatial undersampling" محیط RF ضروری است .
- غیر از سنکرون بودن نمونه برداری برای حسگرها ، M حسگر بصورت مستقل از یکدیگر عمل می کنند . این شرط دوم برای اینکه رتبه ماتریس A(f) برابر M باشد ضروری است .

هر یک از درایه های ماتریس فوق از دو مولفه ایجاد می شود . یکی نویز جمعی در front end هر یک از سنسورها و دیگری سیگنال RF که توسط هر یک از سنسورها حس می شود . برای تخمین طیف ما به مولفه ناشی از سیگنال RF علاقمند هستیم . روش کارآمد برای کاهش نویز از این مولفه ها تجزیه با استفاده از

مقادیر تکین (SVD) است . با بکار بردن SVD برای ماتریس A(f) داریم :

$$\mathrm{U}^{\dagger}(f)A(f)V(f)=\begin{bmatrix}\Sigma(f)\\ 0\end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

که در رابطه فوق علامت † نشان دهنده ترنسپوز هرمیتی است و $\Sigma(f)$ یک ماتریس قطری میباشد که مولفه های روی قطر آن را با $\sigma_k(f)$ نمایش می دهیم . شکل زیر ابعاد ماتریس های فوق را نشان می دهد . یک تجزیه به فرم فوق را پردازنده MTM-SVD می گویند .

ماتریس های $V(f)$ و $U(f)$ اورتونرمال هستند از اینرو داریم :

$$V(f)\mathrm{V}^{\dagger}(f)=I_K\ ,U(f)\mathrm{U}^{\dagger}(f)=I_M \qquad (۱۲)$$

با استفاده از این ویژگی و تجزیه SVD که در بالا آوردیم داریم :

$$A(f)=\sum_{m=0}^{M-1}\sigma_m\boldsymbol{u}_m\boldsymbol{v}_m^{\dagger} \qquad (۱۳)$$

که در رابطه فوق $\sigma_m(f)$ را m امین مقدار تکین و $\boldsymbol{u}_m(f)$ را بردار تکین چپ و $\boldsymbol{v}_m(f)$ را بردار تکین راست گویند . با استفاده از اورتونرمال بودن ماتریس های $V(f)$ و $U(f)$ همچنین روابط زیر براحتی قابل اثبات هستند :

$$A(f)\mathrm{A}^{\dagger}(f)=\sum_{m=0}^{M-1}\sigma_m^2(f)\boldsymbol{u}_m(f)\boldsymbol{u}_m^{\dagger}(f) \qquad (۱۴)$$

$$\mathrm{A}^{\dagger}(f)A(f)=\sum_{k=0}^{M-1}\sigma_k^2(f)\boldsymbol{v}_k(f)\boldsymbol{v}_k^{\dagger}(f) \qquad (۱۵)$$

اکنون می توانیم سه عبارت در مورد پردازنده MTM-SVD بیان کنیم .

۱- مقدار ویژه m ام یعنی $\boldsymbol{\sigma_m^2(f)}$ از رابطه زیر بدست می آید .

$$\sigma_m^2(f)=\sum_{k=0}^{M-1}\left|a_k^{(m)}(f)\right|^2\left|X_k^{(m)}(f)\right|^2 \qquad (۱۶)$$

با قرار دادن $\left|\boldsymbol{a_k^{(m)}(f)}\right|^2=\boldsymbol{\lambda_k^{(m)}(f)}$ و تقسیم $\boldsymbol{\sigma_m^2(f)}$ بر $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{M-1}\lambda_k^{(m)}(f)}$ به رابطه زیر می رسیم :

$$\hat{S}^{(m)}(f)=\frac{\sum_{k=0}^{M-1}\lambda_k^{(m)}(f)\left|X_k^{(m)}(f)\right|^2}{\sum_{k=0}^{M-1}\lambda_k^{(m)}(f)}\ ,m=0,1,2,\dots,M-1 \qquad (۱۷)$$

که باز نویسی رابطه تخمین MTM برای حسگر m ام است . بنابراین می توانیم عبارت زیر را بیان کنیم :

- مقدار ویژه m ام یعنی $\sigma_m^2(f)$ به جز ضریب $\sum_{k=0}^{M-1}\lambda_k^{(m)}(f)$ تخمین طیف multitaper برای سیگنال دریافتی از m امین حسگر را بدست می دهد .

۲- از آنجا که اندیس m مربوط به حسگر هاست می توانیم عبارت دوم را به صورت زیر بیان کنیم .

- بردار تکین چپ $\boldsymbol{u_m(f)}$ جهت سیگنال دریافتی توسط حسگر m ام را تعریف می کند .

۳- اندیس k مربوط به k امین پنجره slepian می باشد و از آنجا که برایk=0,1,2,…,M-1 داریم $\boldsymbol{\sigma_k^2(f)=\sigma_m^2(f)}$ عبارت سوم را هم به شکل زیر بیان می کنیم :

- بردار تکین راست $\boldsymbol{v}_m(f)$ ضرایب multitaper را برای m امین حسگر تعریف می کند .

۴-جزئیات روش MTM

در ادامه به بیان جزئیات حس کردن طیف به روش پنجره های چند گانه میپردازیم.

۴.۱-نمایش طیفی کرامر:

فرآیند ایستان وگسسته زمان X_t با میانگین صفر را در نظر میگیریم.با استفاده از بسط کارهونن لائیو میتوانیم این فرآیند را بر حسب مولفه های فرکانسی ،معادل تبدیل فوریه گسسته (DFT) برای توابع یقینی بنویسیم.لذا خواهیم داشت:

$$X_t=\sum_{l=-L}^{L}C_l\ e^{j2\pi f_l t} \qquad (۱۸)$$

که در آن C_l ها اورتو نرمال میباشند.

فرآیند Z(f) را بصورت زیر تعریف مینماییم:

$$Z(f)=\begin{cases} o & o<f<f_1 \\ C_1 & f_1<f<f_2 \\ C_1+C_2 & f_2<f<f_3 \\ . & \\ . & \\ . & \end{cases} \qquad (۱۹)$$

با تعریف فرآیند جدید dZ(f) به صورت :

$$dZ(f)=\begin{cases} Z(f+df)-z(f) & -\frac{1}{2}<f<\frac{1}{2} \\ 0 & f=1/2 \end{cases} \qquad (۲۰)$$

واضح است که :

$$dZ(f)=\begin{cases} C_l & f=f_l \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad (۲۱)$$

در صورتیکه در رابطه ی (۱۸) تعداد نقاط DFT به بینهایت میل کند f_l ها بسیار به یکدیگر نزدیک شده در بازه ی [-1/2,1/2] بصورت پیوسته قرار میگیرند.با توجه به قضیه ی ریمان در ریاضیات جمع گسسته به انتگرال تبدیل و میتوانیم X_t را بصورت رابطه ی (۲۲) نمایش دهیم:

$$X_t=\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{vt}}\ \mathrm{dZ(v)} \qquad (۲۲)$$

$dZ(v)$ فرآیند افزایشی متعامد است. $Z(v)$ یک فرآیند مجموع بوده و لذا با توجه به تئوری حد مرکزی دارای توزیع گوسی میباشد.نمایش طیف به فرم معادله ی (۲۲) را نمایش طیفی کرامر گویند

۴.۲-تخمین طیف از دیدگاه کرامر:

با توجه به نمایش طیفی کرامر میتوانیم تابع خود همبستگی سیگنال X_t را بصورت زیر نمایش دهیم:

$$E[|X_t|^2]=\int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi ft}\ E[|dZ(f)|^2] \qquad (۲۳)$$

از طرفی میدانیم تابع خود همبستگی از عکس تبدیل فوریه ی چگالی طیف توان بدست می آید ، با توجه به این مطلب و رابطه ی (۲۳) خواهیم داشت:

$$S(f)df=E[|dZ(f)|^2] \qquad (۲۴)$$

از رابطه ی (۲۴) روشی جهت تخمین طیف توان بدست می آید.بدین ترتیب که برای تخمین طیف توان کافیست تخمینی از $dZ(f)$ در نمایش طیفی کرامر بدست آورده و با توجه به فرمول (7) به تخمین طیف بپردازیم.

۴.۳-تخمین طیف از دیدگاه مستقیم

همانگونه که میدانیم مربع قدرمطلق تبدیل فوریه ی یک سیگنال معیاری از توان سیگنال را بدست میدهد. لذا میتوانیم با دیدگاه دیگری چگالی طیف توان یک سیگنال را مورد بررسی قرار دهیم.رابطه ی (۲۵) عبارتی برای تخمین چگالی طیف توان را معرفی میکند.

$$\hat{S}_D(f)=\left|\sum_{n=0}^{n-1} x(n)D_n e^{-j2\pi fn}\right|^2 \qquad (۲۵)$$

در رابطه ی (۲۵) حضور پنجره های D_n جهت محدود کردن دنباله ی x(n) ضروریست.چرا که جهت محاسبات DFT و پیاده سازی عملی لازم است دنباله های x(n) دارای طول محدودی باشند.

هر پنجره ی محدود در زمان D_n دارای طیفی فرکانسی نامحدود است.بنابر این پنجره های D_n دارای درای دو خصیصه ی مهم میباشند یکی اینکه دارای لوب های فرعی (تمرکز انرژی در فرکانس های مختلف) هستند و دیگری اینکه پهنای باند لوب اصلی آنها غیر صفر است.

با توجه به اینکه ضرب دنباله ی x(n) در پنجره ی D_n معادل کانولوشن در حوزه ی فرکانس است ویژگی های مطرح شده برای پنجره های D_n باعث نشت طیف به فرکانسهای مجاور میشود.اگر این نشت طیف ناشی از صفر نبودن پهنای باند لوب اصلی باشد در هر فرکانس محتوای فرکانسی x(n) به فرکانسهای نزدیک آن نشت کرده و در رزولوشن طیف بسیار تاثیرگذار است.با توجه به مطالب فوق مناسبترین پنجره ها ،پنجره هایی با کمترین پهنای باند در لوب اصلی و کمترین تمرکز انرژی در لوب فرعی هستند.

همانگونه که میدانیم زمانی تخمین از یک متغیر تصادفی دقیق است که اولا مقدار تخینی برابر میانگین متغیر تصادفی باشد و ثانیا واریانس تخمین بسیار نزدیک به صفر باشد لذا لازم است واریانس طیف تخمینی با افزایش طول پنجره ها کاهش یابد.با

توجه به این نکته با فرض انتخاب مناسبترین پنجره ها در صورتی که واریانس تخمین با افزایش طول پنجره کاهش نیابد،لازم است از تابع جدیدی مانند $G(f)$ جهت صفر شدن واریانس مطابق معادله ی (۲۶) استفاده نمود.

$$\tilde{S}(f) = \hat{S}_D(f) * G(f) \quad (۲۶)$$

به عملیات فوق smoothing گویند.

۴.۴-مسئله ی حل معادله ی انتگرالی

با بازگشت به مسئله ی تخمین طیف به روش نمایش کرامر (رابطه ی(۲۲)) در صورتی که تبدیل فوریه ی فرایند X_t را با $y(f)$ نمایش دهیم آنگاه با نوشتن رابطه ی تبدیل فوریه ی گسسته و ساده نمودن آن خواهیم داشت:

$$y(f) = \int_{-1/2}^{1/2} k(v,f)\ dZ(v) \quad (۲۷)$$

که برای این رابطه :

$$K(v,f) = e^{j2\pi(v-f)(N-1)/2} \frac{\sin(\pi(v-f)N)}{\sin(\pi(v-f))} \quad (۲۸)$$

که به $K(v,f)$ هسته ی دریکله گویند.

لذا مسئله ی تخمین چگالی طیف توان به حل معادله انتگرالی (۲۷) و بدست آوردن $dZ(v)$ از آن میشود.

روش های مختلفی جهت حل این معادله پیشنهاد شده که یکی از روشهای قابل اطمینان روش مقادیر ویژه است.

۴.۵-مقادیر و توابع ویژه

در اینجا مختصرا به بیان حالت خاصی از این قضیه که مرتبط با موضوع است پرداخته و جهت منحرف نشدن از اصل بحث از ارائه ی اثباتهای این قضیه ی ریاضی خودداری میکنیم.

معادله ی انتگرالی زیر را در نظر میگیریم:

$$y(f) = \int_a^b k(f,f')z(f')df' \quad (۲۹)$$

درصورتیکه بتوانیم توابع اورتونرمال $\psi_i(f)$ را بگونه ای معرفی نماییم که در رابطه ی زیر صدق نماید :

$$\lambda_i\psi_i(f) = \int_a^b k(f,f')\psi_i(f')df' \quad (۳۰)$$

آنگاه :

$$\hat{z}(f) = \sum_m \frac{1}{\lambda_m} y_m \psi_m(f) \quad (۳۱)$$

که در آن :

$$y_m = \int y(f')\psi_m{}^*(f')df' \quad (۳۲)$$

که در آن $\hat{z}(f)$ تخمین $z(f)$ در معادله انتگرالی است.

با توجه به این قضیه جهت حل معادله انتگرالی (۲۷) کافیست توابع ویژه ی این معادله را بیابیم.لذا مسئله ی تخمین طیف به مسئله ی یافتن توابع ویژه ی هسته ی دریکله تبدیل میشود.

۴.۶-ایده ی slepian

Slepian در ۱۹۷۸ توابع ویژه ی هسته ی دریکله با ویژگی منحصر به فردی را معرفی نمود.

دنباله های $v(n)$ با انرژی واحد را در نظر میگیریم. میخواهیم انرژی E این سیگنالها بر بازه ی [-W,W] بیشینه شود.

$$\sum_{n=0}^{N-1} v^2(n) = 1 \quad (۳۳)$$

$$E = \int_{-W}^{W} |V(f)|^2 df \quad (۳۴)$$

که در رابطه ی (۳۴)، $V(f)$ تبدیل فوریه ی گسسته ی v(n) میباشد :

$$V(f) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n)e^{-j2\pi fn} \quad (۳۵)$$

با جایگذاری رابطه ی (۳۵) در (۳۴) خواهیم داشت:

$$E = \sum_{n,m=0}^{N-1} v(n)v(m)\frac{\sin(2\pi W(n-m))}{\pi(n-m)} \quad (۳۶)$$

لذا هدف ماکزیمم نمودن E در رابطه ی (۳۶) با شرط (۳۳) است.

جهت ماکزیمم نمودن یک تابع با حضور یک شرط خاص میتوانیم از معیار ضرایب لاگرانژ استفاده نماییم.

با استفاده از این معیار جهت ماکزیمم نمودن رابطه ی (۳۶) با شرط (۳۳) لازم است عبارت زیر را ماکزیمم نماییم:

$$I = E - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} v^2(n) \qquad (۳۷)$$

با مشتقگیری از رابطه ی (۳۷) بر حسب $v(n)$ و برابر صفر قرار دادن آن به رابطه ی (۳۸) دست می یابیم

$$\lambda_k v_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} v_k(m) \frac{\sin(2\pi W(n-m))}{\pi(n-m)} \qquad (۳۸)$$

که λ_k ها در رابطه ی زیر صدق میکنند :

$$1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_{N-1} > 0 \qquad (۳۹)$$

علاوه بر این با حل معادله ی (۳۷) به این نتیجه میرسیم که λ_k ها با انرژی E محدود در [-W W] برابرند:

$$\lambda_k = E \qquad (۴۰)$$

Slepian ثابت نمود این دنباله های $v(n)$ هسته های دریکله بر بازه ی $[f_0 - W, f_0 + W]$ میباشند.در حقیقت رابطه ی زیر برقرار است:

$$\lambda_i V_i(f - f_0) = \int_{f_0-W}^{f_0+W} k(f, f') V_i(f' - f_0) df' \qquad (۴۱)$$

با مطابقت این رابطه با رابطه ی (۳۰) میتوانیم از نتایج (۳۱) و (۳۲)جهت تخمین $z(f)$ استفاده نماییم.

لذا بطور خلاصه خواهیم داشت:

$$\hat{z}(f) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{\lambda_k} V_k(f - f_0) y_k(f_0) \qquad (۴۲)$$

$$y_k(f_0) = \sum_{t=0}^{N-1} x(t) v_k(t) e^{-j2\pi f t} \qquad (۴۳)$$

عبارت طیف تخمین زده شده برابر است با:

$$\hat{S}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{\lambda_k} V_k(f - f_0) y_k(f_0) \right|^2 \qquad (۴۴)$$

فرآیند $\hat{z}(f)$ فرآیند گوسی مختلط است لذا تخمین طیف که با توجه به رابطه ی (۲۴) از مربع قدر مطلق $\hat{z}(f)$ بدست می آید یک فرآیند χ^2 با دو درجه ی آزادی با واریانس دو برابر درجه ی آزادیست.این واریانس مستقل از تعداد نمونه ها و ثابت است.

با میانگین گیری از $\hat{z}(f)$ بر $[f_0 - W, f_0 + W]$ خواهیم داشت:

$$\bar{S} = \frac{1}{2W} \int_{f_0-W}^{f_0+W} \hat{S}(f) df = \frac{1}{2NW} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{\lambda_k} |y_k(f_0)|^2 \qquad (۴۵)$$

از رابطه ی (۴۵) واضح است که $\bar{S}$ دارای واریانسی برابر $\frac{8NW}{4N^2W^2}$ است.بنابراین واریانس با افزایش طول پنجره کاهش یافته و به صفر میل می نماید ،بنابراین تخمین مناسبی برای چگالی طیف توان خواهد بود.

در اینجا لازم است به نکات موجود در رابطه ی (۴۵) و اهمیت ایده ی $slepian$ اشاره نماییم.

اولا همانگونه که از رابطه ی (۴۵) مشاهده میشود جهت تخمین طیف از K=2NW پنجره استفاده شده است.لذا به این روش تخمین طیف تخمین با پنجره ها چندگانه گویند.

ثانیا همانگونه که بیان شد پنجره های مورد استفاده در این روش تخمین دارای حداکثر تمرکز انرژی در لوب اصلی هستند و در لوب فرعی دارای انرژی تقریبا برابر صفر میباشند ،لذا با توجه به مطالب قبل بهینه ترین پنجره ها جهت تخمین طیف توان میباشند و تخمین طیف بدست آمده تخمین بهینه ای است.

ثالثا با توجه به اینکه $|y_k(f_0)|^2$ تخمین طیف با استفاده از پنجره ی k ام در فرکانس f_0 است $\bar{S}$ در معادله ی (۴۵)میانگین گیری از طیف تخمینی بوسیله ی 2NW پنجره است.

با توجه به اینکه $|y_k(f_0)|^2$ یک متغیر تصادفی است هر چه تعداد پنجره ها افزایش یابد با توجه به قانون ضعیف اعداد بزرگ $\bar{S}$ تقریب دقیقتری از چگالی طیف توان را میدهد.

جهت افزایش تعداد پنجره ها میتوانیم N یا W را افزایش دهیم.افزایش N به مفهوم افزایش طول پنجره ها و افزایش W به مفهوم افزایش پهنای باند لوب اصلی پنجره های مورد استفاده است ،افزایش N تبعاتی از جمله افزایش حجم محاسبات و مصرف توان بالاتر را به دنبال دارد،

افزایش W نیز با توجه به مطالب قبل خود باعث کاهش رزولوشن طیف است ،لذا در طراحی عملی وجود نوعی آستانه بین انتخابهای N و W وجود دارد و تخمین طیف دقیقتر مستلزم صرف هزینه ی بالاتری میباشد.

خلاصه و نتیجه گیری

یکی از مهمترین کار هایی که کل عملکرد یک رادیوی شناختگر به آن وابسته است spectrum sensing می باشد . این وظیفه همواره یک آشکاسازی ساده سیگنال نیست و در بسیاری موارد نیازمند تخمین طیف می باشد . رادیو های شناختگر تخمین طیف به روش های غیر پارامتریک را ترجیح می دهند . در بین روشهای غیر پارامتریک روش MTM به دلیل ویژگیهایی چون رزولوشن طیفی بالا ، کارایی محاسباتی خوب ، قابلیت تعمیم به حالتهای گسترده تر و کاربرد در طبقه بندی سیگنالها ، قابلیت پیاده سازی بصورت مجتمع و بسیاری مزایای دیگر یکی از مهمترین روشهای تخمین طیف برای رادیویی شناختگر می باشد

.

مراجع

[1] D. J. Thomson, Spectrum estimation and harmonic analysis,[Proc. IEEE, vol. 70, pp. 1055–1096, Sep. 1982.

[2] S. Haykin, Adaptive Filter Theory, 4th ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002.

[3] S. Haykin ,D.J.Thomson ,J.H.Reed spectrum sensing for cognitive radio. [Vol.97, No. 5, May 2009 | Proceedings of the IEEE]

[4] Multitaper Spectrum Estimation
Germ´an Prieto
Based on Thomson [1982,1990] June 9, 2004

[5] Neural Signal Processing and Spectral Analysis.Partha P Mitra.cold spring harbor laboratory

[6] Priestley, D. B., (1982), Spectral Analysis and Time Series, Academic, New York, USA